

Table des matières

Intorduction	3
1 NOTIONS GENERALES SUR LA MECANIQUE DES FELUIDES	5
1.1 Introduction	6
1.2 Equation générales de la mécanique des fluides	7
1.3 Equation de conservation de la masse	8
1.4 Equation des quantités de mouvement :	13
1.5 Solution pour des écoulements potentiels bidimensionnels à base de la théorie de la variable complexe.	16
1.6 Analyse dimensionnelle	17
2 Problème d'un écoulement au dessus d'un creux triangulaire	19
2.1 Position du problème	20
2.2 Théorie des lignes de courant libres	21
2.3 Transformation de Schwartz-Christoffel	22
2.4 Solution exacte	22
3 Problème d'un écoulement au dessus d'un creux triangulaire avec tension de surface	30
3.1 Introduction	31
3.2 FORMULATION GENERALE DU PROBLEME	31
3.3 Méthode de série	35
3.3.1 Comportement local de la vitesse au voisinage des singularités . . .	37
3.3.2 Formulation de la série	39
3.4 Résultats et discussions	42

3.4.1	Solution sans tension de surface	42
3.4.2	Solution avec tension de surface	43
Annexe		48
A.1	Méthode de Newton pour la résolution d'un système d'équations non linéaires $F(X)=0$	49
A.2	Algorithme de Newton	50
A.3	Méthode de factorisation de Doolittle $A \rightarrow LU$ pour la résolution d'un système linéaire $AX=B$	51
A.4	Algorithme de Factorisation de Doolittle $A \rightarrow LU$	52

Introduction

Dans le présent travail, on se propose d'étudier un écoulement à surface libre sur une dépression de forme triangulaire. L'écoulement est supposé bidimensionnel et potentiel. Puisque l'écoulement est bidimensionnel et potentiel, le plan des variables (x, y) d'écoulement peut être identifié au plan de la variable complexe $z = x + iy$. En négligeant les tensions de surface et les forces de gravité, théoriquement on peut calculer la solution exactement en utilisant une transformation conforme d'hodographe du à *Kirchhoff*(1869) et la transformation *Schwartz – Christoffel*. Si l'effet des forces de gravité ou bien les tensions de surface ne sont pas négligées, le problème ne peut être résolu exactement. Pour résoudre le problème, deux approches peuvent être utilisées. On cherche une solution asymptotique en considérant les paramètres du problème sont assez petits (le nombre du Froude F si les forces de gravité sont non nulles ou bien le nombre du *Weber* α si les tensions de surface sont non nulles) ou bien on résoud le problème numériquement.

Notre travail est composé de trois chapitres et un annexe.

Le premier chapitre présente les notions préliminaires et les définitions générales de la mécanique des fluides. Une présentation de la théorie de la variable complexe et les transformations conformes et leurs relations avec les écoulements bidimensionnels et potentiels est donnée à la fin du chapitre.

Dans le second chapitre, l'effet des forces de gravité et les tensions de surface sont nulles. On utilise la méthode hodographe de Kirchhoff et les transformations conformes pour obtenir une solution exacte. Le résultat reste incomplet à la complexité de l'intégrale obtenue. La solution exacte est donnée sous forme d'une intégrale elliptique, la solution exacte est un courant uniforme sur un plan horizontal retrouvé.

Dans le chapitre 3, les tensions de surface sont prises en considération et l'effet des forces de gravité est nul. Dans ce cas, le problème se caractérise par le nombre de *weber* α . La présence de ce paramètre réduit l'équation de *Bernoulli* à une équation non linéaire,

qu'on ne peut pas résoudre explicitement sous forme d'une solution exacte. Le problème non linéaire complet est résolu numériquement en se basant sur une procédure de troncation de série formulée par *Vanden Broeck et Keller* [4]. L'idée est de transformer le plan d'écoulement à un disque unité dans le plan complexe ω . On présente la vitesse complexe par une série entière. On formule la série de sorte que les conditions aux limites sur les parois rigides soient satisfaites. Sur la surface libre, la condition de *Bernoulli* doit être satisfaite. On tronque la série après N termes. Puis on calcule les coefficients a_n pour différentes valeurs du nombre de *Weber* α par collocation. Le problème se réduit à un système algébrique de N équations non linéaires qu'on résout par la méthode de *Newton*. L'algorithme converge pour tout $\alpha > 0$, ce qui suggère que la solution du nombre de *Weber* α on a calculé l'écoulement pour différentes configurations du creux en faisant varier l'angle $\beta, 0 < \beta < \pi/2$, on donne sans calculer, différents types d'écoulement possibles.

Dans l'annexe, on présente la méthode de *Newton* pour la résolution d'un système d'équations non linéaire et son algorithme et la méthode de factorisation *LU* de *Doolittle* et son algorithme. A la fin, on donne le programme écrit en MATLAB utilisé pour résoudre le problème numériquement.

Chapitre 1

NOTIONS GENERALES SUR LA MECANIQUE DES FLUIDES

Résumé : dans ce chapitre on présente les notions préliminaires concernant les écoulements potentiels, bidimensionnels, ainsi que les équations générales du mouvement des fluides

Contenu :

1.1 Introduction.

1.2 Equation générales de la mécanique des fluides.

1.3 Equation de conservation de la masse.

1.4 Equations des quantités de mouvement.

1.5 Solutions pour des écoulements potentiels bidimensionnels à base de la théorie de la variable complexe.

1.6 Analyse dimensionnelle.

1.1 Introduction

Les équations qui régissent le mouvement d'un fluide sont complexes et des solutions analytiques ne pourront être trouvées que dans certaines situations simples. Certaines hypothèses sur le comportement et les propriétés physiques du fluide sont faites pour simplifier les équations de mouvement.

Les équations les plus simples de l'écoulement sont obtenues si on considère un fluide parfait où tout effet de viscosité et les effets thermodynamiques sont négligés.

Description Lagrangienne et Eulerienne du mouvement des fluides.

Soit Ω un domaine occupé par un milieu continu rapporté à un référentiel $R(o; x, y, z)$. En mécanique des milieux continus. Il ya deux façons de décrire le mouvement des particules : description Eulerienne et description Lagrangienne. Chacune est plus adaptée au milieu continu considéré.

1- Dans la description Lagrangienne on décrit le mouvement par les trajectoires des particules d'identités déterminées. L'identité d'une particule est caractérisée par sa position initiale $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à l'instant t_0 . La description du mouvement est par conséquent donnée par l'équation " position de la particule " : $\vec{r} = \vec{r}(t, M_0)$ Où \vec{r} est le vecteur position de coordonnées x_i . Il est alors facile de définir la vitesse et l'accélération instantanée de la particule à un instant quelconque :

$$\vec{V} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) = \vec{V}(t, M_0); \quad \vec{\gamma} = \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) = \vec{\gamma}(t, M_0).$$

Cette description est utilisée dans l'élasticité et la mécanique des particules solides. Due à la densité élevée du fluide, énumérer les particules du fluide en étude est une tâche impossible. De plus, les particules ne conservent pas leurs identités pour longtemps en raison de la diffusion. Pour cela, on utilise la description d'*Euler* qui consiste à se fixer en un point de l'espace et observer les variations des caractéristiques des particules du fluide passant par ce point.

2- Description Eulerienne : $M(x, y, z)$ un point de l'espace. A l'instant t , il y a en M une particule P de vitesse \vec{V} et d'autres caractéristiques physiques π (densité ρ , température T , viscosité μ , etc...). à l' instant $t + dt$, c'est une autre particule qui s'y trouve, avec une vitesse et des caractéristiques physiques généralement différentes. On a donc en M à

l'instant t :

$$\vec{V} = \vec{V}(M, t) = \vec{V}(x, y, z, t) \text{ Ou } u_i = u_i(x, y, z, t) \text{ et } \pi = \pi(M, t) = \pi(x, y, z, t).$$

La description cinématique du mouvement consiste donc à donner les champs vectoriels et scalaires décrivant l'écoulement en fonction des variables (x, y, z) de l'espace et du temps t .

En description Eulerienne, on doit distinguer deux notions de dérivées par rapport au temps t . La dérivée partielle notée $\frac{\partial}{\partial t}$ et la dérivée matérielle notée $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{d}{dt}$ qui consiste à calculer la variation par rapport au temps d'une caractéristique d'une particule en un intervalle de temps dt . La relation entre $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{d}{dt}$ est donné par :

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}}.)$$

Exemple 1 $\frac{d\pi}{dt} = \frac{\partial \pi}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \pi) = \frac{\partial \pi}{\partial t} + u \frac{\partial \pi}{\partial x} + v \frac{\partial \pi}{\partial y} + w \frac{\partial \pi}{\partial z}$.

Où (u, v, w) sont les composantes du vecteur vitesse \vec{V} .

1.2 Equation générales de la mécanique des fluides

Pour obtenir les équations générales et formuler un problème de la mécanique de fluides sous forme mathématiques, il faut auparavant disposer d'un certain nombre d'information sur :

- La nature des forces et énergies mises en jeu.
- La nature des fluides (lois de comportements).
- La nature des conditions aux frontières (conditions aux limites et initiales).

Hypothèses concernant la nature des forces

Considérons un domaine D de fluide, délimité par une surface S .

Les forces qui agissent en chaque point du fluide sont de deux types :

1° forces intérieures à D sont d'origine moléculaires, elles sont opposées deux à deux et donc leurs résultante est nulle.

2° forces extérieure sont des forces de volume ou de surface.

Les forces de volume dues d'existence d'un ou plusieurs champs de forces.

Elles sont de la forme $\rho \vec{F} dv$ pour un élément de volume dv .

Les forces de surface dues aux actions moléculaires du milieu extérieur sur le domaine D . Pour un élément de surface ds cette force s'écrit $\vec{t} ds$. Le vecteur \vec{t} est appelé vecteur contrainte il peut être décomposé suivant la normale à ds et le plan tangent à ds . Le vecteur contraint \vec{t} est en fait défini à l'aide du tenseur des contraintes $\overrightarrow{\sigma}$. \vec{t} est donné par la relation :

$$\vec{t} = \overrightarrow{\sigma} \cdot \vec{n} \quad \text{Où } \vec{n} \text{ désigne le vecteur normal à la surface orienté vers l'extérieur.}$$

Loi de comportement Il existe plusieurs types de comportement. Nous nous intéresserons à la loi de comportement des fluides dits *Newtoniens*. Cette loi s'écrit sous la forme

$$\overrightarrow{\sigma} = -P \overrightarrow{I} + \overrightarrow{\tau}$$

Où P est la pression, \overrightarrow{I} le tenseur identité et $\overrightarrow{\tau}$ le tenseur des contraintes visqueuses. $\overrightarrow{\tau}$ est donné par la relation :

$$\overrightarrow{\tau} = 2\mu \overrightarrow{\zeta} + \eta \overrightarrow{I} \operatorname{div} \vec{V} \quad (1.2)$$

Où μ et η sont deux coefficients caractérisant les propriétés visqueuses du milieu considéré et $\overrightarrow{\zeta}$ est le tenseur de vitesse de déformation linéaire.

1.3 Equation de conservation de la masse

Considérons un volume v_0 de l'espace délimité par une surface S_0 . La quantité (la masse) de fluide contenu dans ce volume est égale à :

$$m = \int_{v_0} \rho dv$$

ρ étant la masse volumique. A travers l'élément ds de la surface délimitant le volume considéré. Il s'écoule, par unité de temps, une quantité de fluide égale à $\rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds$; cette quantité est positive si le fluide sort du volume v_0 , et négative si le fluide pénètre. La quantité totale de fluide sortant du volume v_0 par unité de temps est donc égale à :

$$\int_{v_0} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds$$

D'autre part, la diminution de la quantité de fluide contenu dans le volume v_0 est donnée par : $-\frac{\partial}{\partial t} \int_{v_0} \rho dv$

Puisque la masse sortante du volume v_0 est égale à la diminution de la masse à l'intérieur de v_0 (la masse n'est ni créée ni perdue à l'intérieure de v_0) on a l'identité :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{v_0} dv = - \int_s \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds$$

Transformons l'intégrale de surface en une intégrale de volume on obtient : $-\int_s \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \text{div}(\rho \vec{V}) dv$

Ou encore :

$$\int_{v_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{V} \right) dv \quad (1.3)$$

Puisque cette expression est vérifiée quel soit le volume considéré, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{V} \quad (1.4)$$

Cette équation est connue sous le nom « équation de continuité » ou « équation de la conservation de la masse ». Elle exprime que la masse d'une particule de fluide est conservé au cours de l'écoulement. On peut écrire cette équation sous une autre forme.

Nous avons en effet : $\text{div}(\rho \vec{V}) = \rho \text{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho$

Donc

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V})}_{\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho + \rho \text{div} \vec{V} = 0 \quad (1.5)$$

Et par suite il vient :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{V} = 0 \quad (1.6)$$

Cas des fluides incompressibles.

Un fluide est dit incompressible si :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Par conséquent l'équation de continuité (1.6) devient :

$$\text{div} \vec{V} = 0 \quad (1.7)$$

Donc : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho = 0$

Cas particuliers :

1° $\overrightarrow{\text{grad}} \rho = 0$ (ρ ne dépend pas de (x, y, z)). L'équation de continuité nous conduit à

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, donc ρ ne dépend pas non plus de t . Par suite : $\rho = Cte$ dans tout le fluide

Il s'agit donc d'écoulement de fluide homogène incompressible

2° $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (en un point fixe ρ ne dépend pas de t). L'équation de continuité nous donne :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho = 0$$

Trois cas sont possibles :

$\vec{V} = 0$ et $\overrightarrow{\text{grad}} \rho$ quelconque, l'équation est valable pour un fluide au repos.

$\vec{V} \neq 0$ et $\overrightarrow{\text{grad}} \rho = 0$. ρ est constant dans l'espace et dans le temps, on retrouve le cas précédent d'un écoulement à masse volumique : $\rho = cte$.

\vec{V} et $\overrightarrow{\text{grad}} \rho$ sont orthogonaux en tout point de l'écoulement.

Débit et fonction de courant.

Equation des lignes de courant :

Les lignes de courant et les trajectoires sont deux types de courbes qui ont été définies pour décrire l'écoulement d'un fluide. La trajectoire représente le chemin d'une particule de fluide. La ligne de courant est une courbe tangente en chacun de ces points au vecteur vitesse en ce point. La définition d'une ligne de courant est donnée par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (1.8)$$

Écoulement plan et stationnaire d'un fluide incompressible

Dans un domaine D , un écoulement du fluide est dit :

a) Plan (ou bidimensionnel) si en tout point de ce domaine, à l'instant t , le vecteur vitesse \vec{V} est parallèle à un plan donné (p) .

b) Stationnaire si le vecteur vitesse \vec{V} reste constant en n'importe quel point de D occupé par le fluide i.e $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$.

Dans ce cas, l'équation de continuité se réduit alors à :

$$\text{div } \vec{V} = \frac{u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.9)$$

L'équation (1.9) exprime la condition pour qu'il existe une fonction $\psi(x, y, t)$, dite fonction de courant définie par les expressions suivantes :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \quad (1.10)$$

En effet, l'équation (1.9) est la condition nécessaire et suffisante pour que l'expression

$$-vdx + udy \quad (1.11)$$

Soit une différentielle exacte d'une fonction de x et de y . De la relation (1.10), on peut déduire :

$$u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (1.12)$$

Ainsi, à un instant t_0 donné le vecteur-vitesse (u, v) , tangent à la ligne de courant, est normal au vecteur $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$, lui-même normal à ligne de courant $\psi(x, y, t_0) = cte$. Ceci revient à dire que les lignes de courant ont pour équation :

$$\psi(x, y, t_0) = cte \quad (1.13)$$

Ce résultat nous permet, à tout instant, de coter chaque ligne de courant par la valeur de la fonction de courant qui la caractérise, une fois choisie la cote Ψ_0 d'une ligne de courant particulière.

Dans ce cas le flux à travers une courbe finie (C) qui part d'une ligne de courant pour aboutir une autre est donné par :

$$q_v = \int_C \vec{V} \cdot \vec{n} dl$$

Où \vec{n} est un vecteur unitaire normal à (C) en tous ces point et orienté dans le sens de l'écoulement. Ainsi,

$$q_v = \int_D \left(-\frac{\partial y}{\partial l} u + \frac{\partial x}{\partial l} v \right) dl = \int_C (vdx - udy)$$

Les relations (1.10) donnent :

$$q_v = \int_C d\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad (1.14)$$

Ecoulement plan et potentiel d'un fluide incompressible

Ecoulement irrotationnel :

On dit qu'un écoulement est irrotationnel si :

$$\overrightarrow{Rot V} = 0 \quad (1.15)$$

$\overrightarrow{Rot V}$ Représente le vecteur rotation ou vortacité.

Dans les régions d'écoulement d'un fluide non visqueux, et loin des parois solides, l'écoulement peut être considéré comme irrotationnel.

L'équation (1.15) va apporter des simplifications importantes dans les équations du mouvement. Nous rappelons qu'un champ vectoriel $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ dont le rotationnel est nul peut être toujours représenté par le gradient d'une fonction scalaire. C.à.d qu'il existe une fonction $\varphi(x, y)$ telle que :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \quad (1.16)$$

φ Représente le potentiel de vitesse.

Due à l'existence d'une fonction potentielle, les écoulements irrotationnels sont dits écoulements potentiels.

Equations aux dérivées partielles pour les fonctions φ et ψ

La fonction potentielle φ , définie par la relation (1.16), et la fonction ligne de courant ψ , définie par la relation (1.10), vérifient l'équation de Laplace comme nous allons le voir.

1°- Dans le cas d'un écoulement plan d'un fluide incompressible, l'équation de conservation de la masse, est donnée par (1.9), ceci implique qu'il existe une fonction de courant $\psi(x, y, t)$ vérifiant (1.10).

Tandis que le caractère irrotationnel du mouvement, que traduit l'équation :

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1.17)$$

Entraine l'existence d'une fonction potentielle $\varphi(x, y, t)$ vérifiant :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (1.18)$$

2°- Quand le double caractère d'incompressibilité et d'irrotationnalité est rempli, les fonctions φ et ψ , vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right. \quad (1.19a) \quad (1.19b)$$

On déduit aussi de la relation (1.19), que les fonctions φ et ψ , vérifient toutes les deux l'équation de *Laplace* :

Si on porte les valeurs de u et de v dans l'équation (1.9) on obtient l'équation de Laplace pour la fonction ψ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.20)$$

Et si on porte les valeurs de u et de v dans l'équation (1.17) on obtient l'équation de *Laplace* pour la fonction ψ .

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.21)$$

1.4 Equation des quantités de mouvement :

On considère le domaine fluide D , délimité par la surface S . Le domaine se déplace sous l'action des forces de volume et des forces de surface.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à ce domaine

masse \times accélération = résultante des forces extérieures

$$\rho dv \frac{dv}{dt} = \rho dv \vec{F} + \vec{\tau} ds$$

$$\iiint_D \rho dv \frac{dv}{dt} = \iiint_D \rho \vec{F} dv = \iint_S \vec{\tau} ds$$

Avec $\vec{\tau} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$

$$\iiint_D \rho dv \frac{d\vec{V}}{dt} = \iiint_D \rho \vec{F} dv = \iint_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} ds$$

En utilisant le théorème de la divergence, on transforme l'intégrale de surface en intégrale de volume donné par la relation :

$$\iint_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} ds = \iiint_D \text{div } \vec{\sigma} dv$$

Ce qui donne :

$$\iiint_D \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dv = \iiint_D (\rho \vec{F} + \text{div } \vec{\sigma}) dv$$

Puisque D est quelconque

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{F} + \text{div } \vec{\sigma} \quad (1.23)$$

Quand les forces de volume dérivent d'un potentiel \varkappa on a : $\vec{V} = -\text{grad } \varkappa$

On aura alors :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\rho \text{grad } \varkappa + \text{div } \vec{\sigma} \quad (1.24)$$

Par ailleurs les fluides considérés sont *Newtoniens* on a : $\vec{\sigma} = -P \vec{I} + \vec{\tau}$, donc $\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\text{grad } P + \text{div } \vec{\tau}$. L'équation (1.24) devient alors : $\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \underbrace{-\rho \text{grad } \varkappa}_{\text{force de volume}} +$

$\underbrace{\text{grad } \varkappa}_{\text{force de pression}} + \underbrace{\text{div } \vec{\tau}}_{\text{force de viscosité}}$

Si le fluide est de type *Newtonien* on aura : $\vec{\tau} = 2\mu \vec{\xi} + \eta \vec{I} \text{div } \vec{V}$

Ce qui donne, en supposons μ et η constants

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\rho \text{grad } P + \mu \Delta \vec{V} + (\mu + \eta) \text{grad}(\text{div } \vec{V}) \quad (1.25)$$

Où μ et η sont deux coefficients caractérisant les propriétés visqueuses du milieu considéré.

Cette équation est connue sous le nom de « équation de *Lamb* ».

Cas des fluides incompressibles

Dans le cas d'un fluide incompressible on a $\text{div } \vec{V} = 0$. L'équation (1.25) devient alors :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\rho \text{grad } \varkappa - \text{grad } P + \mu \Delta \vec{V} \quad (1.26)$$

Cette équation est connue sous le nom de « équation de *Navier – Stokes* ».

Equation d'Euler :

Si on néglige la viscosité, l'équation de *Navier – Stokes* :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\rho \vec{F} - \text{grad } P \quad (1.27)$$

Cette équation est développée par *Euler* est nommée après lui.

L'équation d'Euler peut être écrite sous une autre forme on a tout d'abord :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

Donc

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{F} \quad (1.28)$$

Sachant que l'on a l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right) = (\vec{V} \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} + \vec{V} \times \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{V} \quad (1.29)$$

En substituant cette équation dans l'équation (1.28) on a :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{F} + \vec{V} \times \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{V} \quad (1.30)$$

Equation de Bernoulli

A partir de l'équation d'Euler pour un fluide incompressible et parfait et lorsque les forces de volume dérivent d'un potentiel l'équation (1.30) s'écrit :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right) + (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P - \overrightarrow{\text{grad}} \varkappa \quad (1.31)$$

On a alors :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \varkappa \right) + (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V} = 0 \quad (1.32)$$

Et dans le cas d'un écoulement stationnaire, on peut écrire :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \varkappa \right) + (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V} = 0 \quad (1.33)$$

On projette cette équation sur une ligne de courant de vecteur unitaire s , on a alors :

$$\frac{\partial}{\partial s} + \vec{s} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$$

$$\text{Ce qui donne : } \vec{s} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \varkappa \right) + \vec{s} \cdot (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V} = 0$$

$$\text{Comme } \vec{s} \text{ et } \vec{V} \text{ sont colinéaires } \vec{s} \cdot (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V} = 0$$

$$\text{Ainsi, on aura : } \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \varkappa \right) = 0$$

Le long d'un filet fluide on a alors :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \varkappa = Cte \quad \text{le long d'une ligne de courant.} \quad (1.34)$$

Les forces de volume se réduisent le plus souvent à la seule force de pesanteur, dans ce cas, on a :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g\varkappa = Cte \quad (1.35)$$

En général, la constante change avec la ligne de courant.

1.5 Solution pour des écoulements potentiels bidimensionnels à base de la théorie de la variable complexe.

En un domaine Ω d'un écoulement plan incompressible et irrotationnel, les fonctions φ et ψ vérifient l'équation de *Laplace*.

La théorie de variables complexes offre une méthode très puissante pour l'obtention de solution de l'équation de *Laplace*.

Au lieu de considérer φ et ψ comme étant des fonctions de x et y , on utilise une nouvelle variable, qui représente la variable complexe : $z = x + iy$

Dans le plan de la variable complexe z , on définit la fonction complexe $f(z)$ par :

$$f(z) = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y)$$

Les fonctions φ et ψ vérifient l'équation de *Laplace* de plus elles vérifient les relations (1.19) qui sont les conditions de *Cauchy-Reimann*. Donc $f(z)$ est une fonction analytique de la variable z . La fonction $f(z)$ est appelée fonction potentielle complexe. Si on dérive $f(z)$ par rapport à la variable z on obtient :

$$W(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} = u - iv \quad (1.36)$$

D'où on déduit que la fonction $W(z) = u - iv$ est une fonction analytique. $W(z)$ est dite vitesse complexe.

1.6 Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle porte un intérêt pratique à la mécanique des fluides, elle compte parmi les techniques indispensables pour résoudre un problème de physique. Son but principal consiste à établir des relations entre les dimensions physiques des variables qui interviennent dans les équations décrivant le mouvement des fluides. La mesure des quantités physiques a conduit à choisir un certain nombre de grandeurs fondamentales, en fonction des quelles on peut exprimer les dimensions des autres grandeurs physiques.

Nous rappelons que les grandeurs fondamentales du système international (*S.I*) sont la longueur (L), le temps (T) et la masse (M) qui suffisent pour l'étude des phénomènes mécaniques. Dans certains problèmes on est conduit à choisir soit quatre unités fondamentales (L, M, T, θ), soit cinq unités fondamentales (L, M, T, θ, Q) (θ : température, Q : quantité de chaleur).

En outre, nous supposons une familiarité rudimentaire avec la notion de dimension physique, i.e. "accélération, écrite par ces unités typiques m/sec^2 , en dimension longueur / temps² etc...."

Nous utilisons le théorème π de *Vachy - Buckingham*, qui montre comment on adimensionnelles réduit le nombre de paramètres qui détermine la solution d'un problème.

Théorème π de Vachy – Buckingham

Soit un phénomène physique comprenant n variables, dont les dimensions desquelles interviennent P grandeurs fondamentales.

L'équation $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ qui régit le phénomène peut se mettre sous forme

$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}) = 0$. Où $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}$ sont des grandeurs sans dimensions physiques indépendantes.

Il ya une série de terme π possible. Certains termes π sont cependant particulièrement intéressants à mettre en évidence.

1. Rapport de deux grandeurs physique de même espèce ($d/D, \varepsilon/d$ etc...).

2. Certain produit sans dimension (nombre de *Reynolds* R , nombre de *Froude* \varPi , nombre de *Match* M , etc...).

Donc on peut écrire

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \omega_1, \omega_2) = 0 \quad (1.37)$$

π : Produit sans dimension (R, \varPi, M, \dots)

ω : Rapport de deux grandeurs physiques de même espèce ($d/D, \varepsilon/d$ etc...).

Chapitre 2

Problème d'un écoulement au dessus d'un creux triangulaire

Résumé : dans ce chapitre, on étudie un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel à surface libre d'un fluide incompressible au dessus d'un creux de forme triangulaire. En négligeant l'effet de gravité et les tensions de surface, le problème admet une solution exacte qu'on peut calculer en utilisant des lignes de courant et la transformation hodographe de *Kirchhoff* (1869).

Contenu :

II.1 Position du problème.

II.2 Théorie des lignes de courant libres.

II.3 Transformation de Schwartz-Christoffel.

II.4 Solution exacte.

2.1 Position du problème

Considérons un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non-visqueux, au dessus d'un creux triangulaire (Figure 2.1). On choisit comme repère de référence l'axe des x le long du fond rigide et horizontal AB , DE et l'axe des y perpendiculaire à l'axe des x passant par le sommet C du creux et dirigé vers le haut. On note O l'origine du repère. Les cotés BC et CD du triangle sont tels que le coté BC fait un angle $-\beta$ et CD fait un angle $+\beta$ avec l'axe des x . La courbe $FGHIJ$ est la surface libre.

Loin du creux triangulaire BCD , l'écoulement est uniforme de vitesse constante U_0 et de profondeur constante L .

Sur la surface libre, puisque les tensions de surface sont négligées, l'équation de *Bernoulli* donne

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} = cte \quad (2.1)$$

où q est la vitesse, P est la pression et ρ est la densité du fluide. La pression est constante sur la surface libre, l'équation de *Bernoulli* (2.1) devient

$$q = cte \quad \text{sur la surface libre} \quad (2.2)$$

On rapporte le plan d'écoulement dans le repère (Oxy) au plan complexe de la variable $z = x + iy$. Dans ce plan, la fonction $f = \varphi + i\psi$ où φ est la fonction potentielle, ψ est la fonction ligne de courant sont analytiques de la variable z .

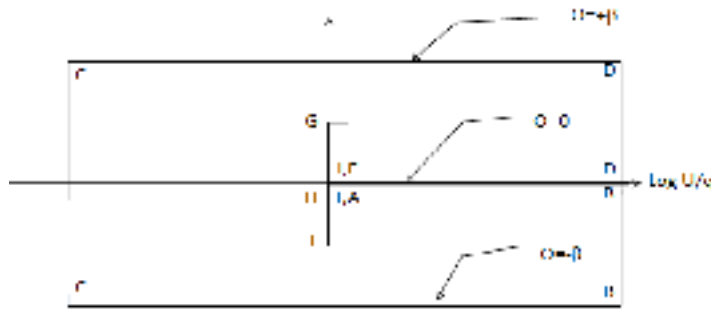


FIG. 2-1 – Schéma d'un écoulement bidimensionnel dans un canal et au dessus d'une dépression triangulaire

2.2 Théorie des lignes de courant libres

La théorie des lignes de courant libre consiste à étudier les problèmes d'écoulements potentiels, bornés par des parois rigides rectilignes et des lignes de courant libres de formes inconnues, sur lesquelles la pression est supposée constante.

Si les lignes de courant libres ne sont pas présentes et l'effet de la gravité ainsi que les effets de la tension de surface sont négligées, la région d'écoulement peut être transformée par une transformation conforme à une région polygonale. Cette région est une partie du plan hodographe défini par $\Omega = \log \left(1/\frac{df}{dz} \right)$. Dans les deux cas, on peut trouver la solution exacte du problème.

Dans le cas où l'écoulement est délimité partiellement par des surfaces libres, on donne la méthode de résolution introduite par *Kirchhoff* (1889). L'idée est d'introduire la fonction complexe Ω définie par

$$\Omega = \log \left(U_0 / \frac{df}{dz} \right) = \log \left(\frac{U_0}{u - iv} \right) = \log \left(\frac{U_0}{q} \right) + i\theta \quad (2.3)$$

Où $f = \phi + i\psi$; $\frac{df}{dz} = u - iv$; $q = \sqrt{u^2 + v^2}$,

(u, v) sont les composantes du vecteur vitesse suivant les directions de l'axe des x et l'axe des y respectivement, θ est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale et U_0 la vitesse de référence.

On note que la fonction Ω possède les propriétés suivantes :

- La partie réelle de Ω est constante sur la ligne de courant libre, i.e $\log \left(\frac{U}{q} \right) = cte$.
- La partie imaginaire de Ω est constante sur chaque paroi rectiligne, i.e $\theta = cte$.

Par conséquent, l'écoulement est représenté par une figure plane de cotés rectilignes (polygone) noté Ω . A l'aide de la transformation conforme de *Schwartz – Christoffel*, le domaine Ω polygonal est transformé en un demi-plan supérieur de la variable auxiliaire λ . Ainsi, dans le plan λ , l'écoulement est uniforme représenté par la fonction potentielle $f(\lambda) = c\lambda$. Et par conséquent, par les transformations inverses des transformations conformes utilisées, on peut retrouver l'écoulement original $f(z)$.

Pour illustrer ce qui précède, nous donnons quelques propriétés de la transformation conforme de *Schwartz – Christoffel*.

2.3 Transformation de Schwartz-Christoffel

La transformation de *Schwartz – Christoffel* transforme l'intérieur d'un polygone en demi plan supérieure (ou inférieur) d'un autre plan. Pour voir cela, on considère un polygone dans le plan Ω , ayant pour sommet A_1, A_2, \dots, A_n et pour angles intérieurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ respectivement.

Soient A_1, A_2, \dots, A_n (Figure 2.2) les points correspondants respectivement $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de l'axe réel du plan λ (Figure 2.3).

Une transformation qui représente l'intérieur R du polygone considéré sur le demi-plan supérieur \tilde{R} du plan λ est donnée par

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = M(\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} \quad (2.4)$$

Ou bien

$$\Omega = M \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} (\lambda - \lambda_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} d\lambda + N \quad (2.4 \text{ b})$$

Où M et N sont des constantes complexes à déterminer et ajuster selon le besoin.

(2.4) ou bien (2.4 b) définissent la transformation de *Schwartz – Christoffel*.

On note que :

- Parmi les points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, on peut choisir arbitrairement.
- Les constantes M et N déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.
- On choisit un point, par exemple λ_n , à l'infini, cas dans lequel le dernier facteur de (38) n'existe pas.
- Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme le cas limite de polygones fermés.

2.4 Solution exacte

Dans notre cas, nous avons un écoulement délimité par un fond rigide rectiligne ($ABCDE$) et une surface libre ($FGHIJ$). si on néglige les tensions de surface et les forces de gravité, une solution exacte peut être calculée en utilisant la transformation

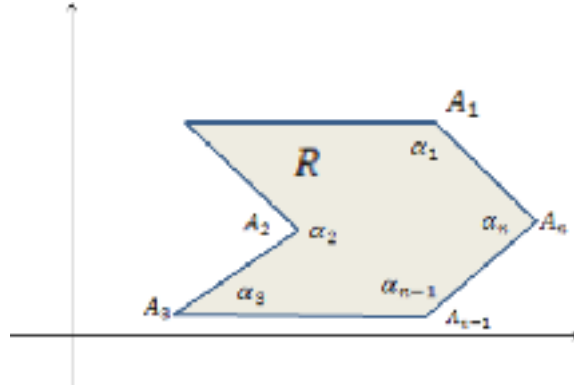


FIG. 2-2 – Plan de la variable Ω

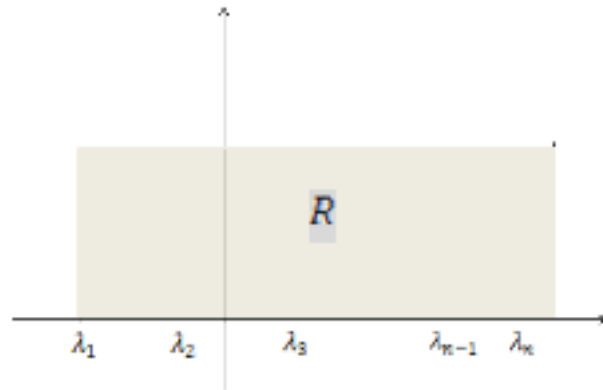


FIG. 2-3 – Plan de la variable λ

hodographe et transformation de *Schwartz – Christoffel*. Pour trouver la solution, nous utilisons les étapes suivantes :

1^{ère} étape

La transformation hodographe Ω transforme le domaine d'écoulement réel dans le plan (x, y) en un domaine d'écoulement de frontière polygonale dans le plan $\left(\log\left(\frac{U_0}{q}\right)\right)$ (Figure 2.4).

2^{ème} étape : la transformation de Ω à λ

Par la transformation de *Schwartz – Christoffel*, le domaine d'écoulement dans le plan Ω est transformé en un demi-plan supérieur de la variable complexe λ . Tel que, dans le plan λ . Les points correspondants sont $A = F(\lambda = -1)$, $B(\lambda = -a)$, $C(\lambda = 0)$, $E = J(\lambda = +1)$, $G(\lambda = -b)$, $H(\lambda = \pm\infty)$ et $I(\lambda = +b)$ (Figure 4). On trouve la représentation conforme suivante

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = K \frac{(\lambda^2 - b^2)}{\lambda(\lambda^2 - a^2)\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \quad (2.5)$$

Au point $C(\lambda = 0)$, lorsqu'on déplace de la ligne BC à la ligne CD , on fait un saut de $+2\beta$ dans le plan Ω (Figure 2.4), donc

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\lambda \frac{d\Omega}{d\lambda} \right) = \frac{2\beta}{\pi} \quad (2.6)$$

Alors que dans la représentation conforme précédente, on a $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\lambda \frac{d\Omega}{d\lambda} \right) = K \frac{b^2}{ia^2}$

On déduit la relation

$$k = \frac{2i\beta a^2}{\pi b^2} \quad (2.7)$$

Une relation entre les points a et b est déduite par : au point $D(\lambda = +a)$, lorsqu'on déplace de la ligne CD à la ligne DE , on fait un saut de $+\beta$ dans le plan Ω (Figure 2.4) donc

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} [(\lambda - a) d\Omega/d\lambda] = -\frac{\beta}{\pi} \quad (2.8)$$

Alors que dans la représentation conforme précédente, on a $\lim_{\lambda \rightarrow 0} [(\lambda - a) d\Omega/d\lambda] = \frac{2i\beta a^2}{\pi b^2} \frac{(a^2 - b^2)}{2a^2\sqrt{(a^2 - 1)}}$

On déduit $a^2 - b^2 = -\frac{b^2}{i}\sqrt{(a^2 - 1)}$

Ou bien

$$b^2 = 1 + \sqrt{(1 - a^2)} \quad (2.9)$$

On conclut la représentation conforme suivante $\frac{d\Omega}{d\lambda} = \frac{2i\beta a^2}{\pi b^2} \frac{(\lambda^2 - b^2)}{\lambda(\lambda^2 - a^2)\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}$

Donc $\Omega = \frac{2i\beta a^2}{\pi b^2} \int \frac{(\lambda^2 - b^2)}{\lambda(\lambda^2 - a^2)\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} d\lambda + N$

N est une constante à déterminer.

Après un calcul d'intégration, on trouve

$$\Omega = \frac{2i\beta a^2}{\pi b^2} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(a^2 - b^2)}{a^2 \sqrt{(a^2 - 1)}} \left(\arctan h \frac{-1 + \lambda a}{\sqrt{(a^2 - 1)}\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} - \arctan h \frac{1 + \lambda a}{\sqrt{(a^2 - 1)}\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right) + \frac{b^2}{a^2} \left(2 \arctan h \frac{1}{\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right) \right] \right\} + N$$

Puisque

$$\arctan h \frac{-1 + \lambda a}{\sqrt{(a^2 - 1)}\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} = \frac{1}{2} \log \arctan \frac{\sqrt{(a^2 - 1)}\sqrt{(\lambda^2 - 1)} - 1 + \lambda a}{\sqrt{(a^2 - 1)}\sqrt{(\lambda^2 - 1)} - 1 - \lambda a}$$

$$\arctan h \frac{1}{\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} = \frac{1}{2i} \log \frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} + i}{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} - i}$$

En remplaçant ces dernières relations, on trouve

$$\Omega(\lambda) = \frac{2i\beta a^2}{\pi b^2} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(a^2 - b^2)}{a^2 \sqrt{(a^2 - 1)}} \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} + i\sqrt{(1 - a^2)}}{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} - i\sqrt{(1 - a^2)}} \right)^2 \right) + \frac{b^2}{ia^2} \log \frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} + i}{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} - i} \right] \right\}$$

Pour $\lambda \rightarrow \infty$, $\Omega(\lambda) \rightarrow N$ alors que $\Omega(\lambda = \infty) = 0$; donc $N = 0$

Enfin on déduit

$$\Omega(\lambda) = \frac{\beta}{\pi} \log \frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} + i\sqrt{(1 - a^2)}}{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} - i\sqrt{(1 - a^2)}} \frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} - i}{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} + i} \quad (2.10)$$

$$a = \frac{1}{2} \implies \Omega(\lambda) = \frac{\beta}{\pi} \log \left[\frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} - i}{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} + i} \right]$$

On sait que $\Omega(\lambda) = \log(U_0/\frac{df}{dz})$, alors

$$U_0 \frac{dz}{df} = \left(\frac{\left(\sqrt{(\lambda^2 - 1)} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\sqrt{(\lambda^2 - 1)} - i \right)}{\left(\sqrt{(\lambda^2 - 1)} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\sqrt{(\lambda^2 - 1)} + i \right)} \right)^{\frac{\beta}{\pi}} \quad (2.11)$$

3^{ème} étape

Le domaine d'écoulement réel dans le plan z est transformé à une bande de largeur LU_0 dans le plan de la variable $f = \phi + i\psi$, en choisissant $\psi = 0$ sur la ligne de courant (AE) et $\phi = 0$ au sommet C du creux triangulaire; ainsi que $\psi = +LU_0$ sur la surface libre $FHIJ$ (Figure 2.6).

4^{ème} étape : la transformation de f à λ

En utilisant la transformation de *Schawarz – Cristoffel*, on transforme la bande de largeur LU_0 du plan f en demi plan supérieur de la variable λ , où la correspondance des points A , E et C est donnée par $\lambda = -1$, $\lambda = +1$, $\lambda = 0$, d'où

$$\frac{df}{d\lambda} = M \frac{1}{(\lambda^2 - 1)}$$

Donc $f = M \int \frac{1}{(\lambda^2 - 1)} d\lambda + N$

Alors $f = \frac{M}{2} \log \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + N$

M et N sont deux constantes à déterminer.

Lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ (au point H), $f = +iLU_0$, alors $N = iLU_0$

Lorsque $\lambda \rightarrow 0$ (au point C), $f = 0$, alors $M = -\frac{2}{\pi}LU_0$

On déduit la fonction complexe

$$f = \frac{LU_0}{\pi} \log \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \quad (2.12)$$

Ou bien $\lambda = \frac{e^{\frac{\pi f}{LU_0}} - 1}{e^{\frac{\pi f}{LU_0}} + 1}$

Par conséquent $\frac{df}{d\lambda} = \frac{-2LU_0}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 - 1}$

5^{ème} étape : la solution

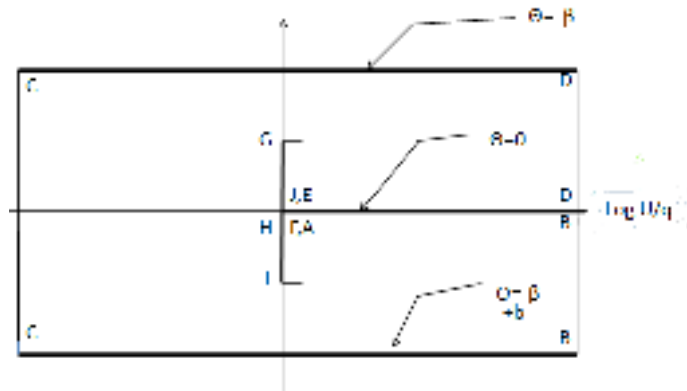


FIG. 2-4 – plan Ω transformé du plan z par transformation de *Kirchoff*

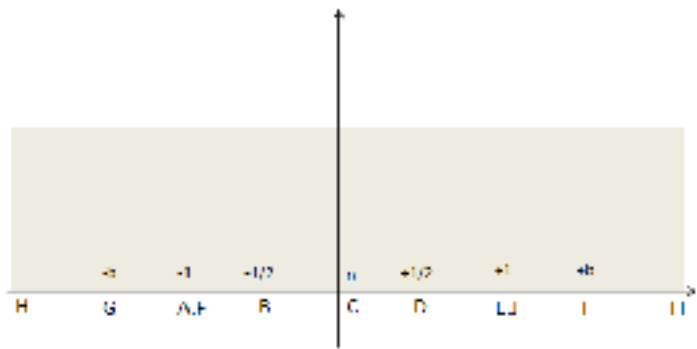


FIG. 2-5 – plan λ . transformé du plan Ω par transformation de Schwartz-christoffel

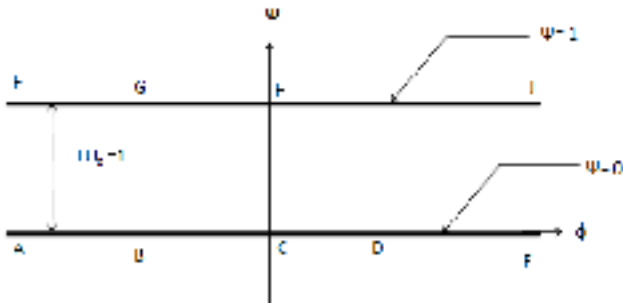


FIG. 2-6 – Transformé du plan z par l'application du $f=\Phi+i\Psi$

En utilisant la relation $U_0 \frac{df}{d\lambda} = U_0 \frac{dz}{df} \frac{df}{d\lambda}$ et les relations (2.11) et (2.13), on obtient

$$U_0 \frac{dz}{d\lambda} = \left(\frac{-2LU_0}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 - 1} \right) \times \left[\frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{(\lambda^2 - 1) - i}}{\sqrt{(\lambda^2 - 1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{(\lambda^2 - 1) + i}} \right]^{\frac{\beta}{\pi}}$$

Alors
$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{-2L}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 - 1} \times \left[\frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{(\lambda^2 - 1) - i}}{\sqrt{(\lambda^2 - 1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{(\lambda^2 - 1) + i}} \right]^{\frac{\beta}{\pi}}$$

Pour obtenir la solution du problème, on éliminé la variable auxiliaire λ des deux relations (2.11) et (2.12 b), ainsi une relation entre f et z sera établir

$$z = \frac{-2L}{\pi} \left[\int \frac{1}{\lambda^2 - 1} \times \left[\frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{(\lambda^2 - 1) - i}}{\sqrt{(\lambda^2 - 1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{(\lambda^2 - 1) + i}} \right]^{\frac{\beta}{\pi}} d\lambda + z_0 \right] \quad (2.14)$$

$$\lambda = \frac{e^{\frac{\pi f}{LU_0}} - 1}{e^{\frac{\pi f}{LU_0}} + 1} \quad ; \quad d\lambda = \frac{2\pi}{LU_0} \frac{e^{\frac{\pi f}{LU_0}}}{\left(e^{\frac{\pi f}{LU_0}} + 1 \right)^2} df$$

Avec z_0 une constante à déterminer.

Sur la surface libre, $f = \phi + LU_0$; $-\infty < \phi < +\infty$, donc la forme de la surface libre est donnée par

$$x(\phi) = \text{Re} \left(-\frac{2L}{\pi} \left[\int \frac{1}{\lambda^2 - 1} \left[\frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{(\lambda^2 - 1) - i}}{\sqrt{(\lambda^2 - 1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{(\lambda^2 - 1) + i}} \right]^{\frac{\beta}{\pi}} d\lambda \right] + x_0 \right) \quad (2.14 \text{ b})$$

$$y(\phi) = \text{Im} \left(-\frac{2L}{\pi} \left[\int \frac{1}{\lambda^2 - 1} \left[\frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{(\lambda^2 - 1) - i}}{\sqrt{(\lambda^2 - 1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{(\lambda^2 - 1) + i}} \right]^{\frac{\beta}{\pi}} d\lambda \right] + y_0 \right) \quad (0.2)$$

$$\lambda = \frac{e^{\frac{\pi f}{LU_0}} - 1}{e^{\frac{\pi f}{LU_0}} + 1} \quad ; \quad d\lambda = \frac{2\pi}{LU_0} \frac{e^{\frac{\pi f}{LU_0}}}{\left(e^{\frac{\pi f}{LU_0}} + 1 \right)^2} d\phi$$

$$f = \phi + iLU_0 \quad ; \quad -\infty < \phi < +\infty$$

x_0 et y_0 sont deux constantes à déterminer selon les cas étudiés.

On donne la forme de la surface libre pour $\beta = +\frac{\pi}{4}$

en prenant la relation (2.14 b), on a

$$x(\phi) = \operatorname{Re} \left(-\frac{2L}{\pi} \left[\int \frac{1}{\lambda^2 - 1} \left[\frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} - i}{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} + i} \right]^{\frac{1}{4}} d\lambda \right] + x_0 \right) \quad (2.15)$$

$$y(\phi) = \operatorname{Im} \left(-\frac{2L}{\pi} \left[\int \frac{1}{\lambda^2 - 1} \left[\frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} - i}{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} + i} \right]^{\frac{1}{4}} d\lambda \right] + y_0 \right) \quad (0.5)$$

$$\lambda = \frac{e^{\frac{\pi f}{LU_0}} - 1}{e^{\frac{\pi f}{LU_0}} + 1} \quad ; \quad d\lambda = \frac{2\pi}{LU_0} \frac{e^{\frac{\pi f}{LU_0}}}{\left(e^{\frac{\pi f}{LU_0}} + 1\right)^2} d\phi \quad (0.6)$$

$$f = \phi + iLU_0 \quad ; \quad -\infty \prec \phi \prec +\infty \quad (0.7)$$

$$(x_0, y_0) = (0, y_H), \quad f_0 = \phi_0 + i\psi_0 = iLU_0 = i, \text{ au point } H \quad (0.8)$$

La forme $\int \frac{1}{\lambda^2 - 1} \left[\frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} - i}{\sqrt{(\lambda^2 - 1)} + i} \right]^{\frac{1}{4}} d\lambda$ est une intégrale qu'on ne peut pas résoudre par les méthodes d'intégrations connues.

Chapitre 3

Problème d'un écoulement au dessus d'un creux triangulaire avec tension de surface

Résumé : Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'effet des tensions de surface sur l'écoulement potentiel bidimensionnel au dessus d'un creux triangulaire étudié au chapitre précédent. Les forces de gravité sont toujours négligées.

Dans le cas où la gravitation et les tensions de surface sont nulles, l'équation de la surface libre a été déterminée paramétriquement. Dans ce chapitre, à cause de la présence d'un terme non linéaire dans l'équation de *Bernoulli*, la solution exacte est impossible à trouver explicitement, donc le problème sera résolu numériquement en utilisant la procédure de troncation de série formulée par *Vanden Broeck et Keller* [3]. Ce problème est caractérisé par le nombre de *Weber* α .

Contenu :

III.1 Introduction.

III.2 Formulation du problème.

III.3 Méthode de série.

III.3.1 Comportement local de la vitesse au voisinage des singularités.

III.3.2 Formulation de la série.

III.4 Résultats et discussions.

3.1 Introduction

Dans notre travail, on étudie un écoulement au dessus d'une dépression triangulaire étudié dans le chapitre II, mais en considérant les tensions de surface. Dans ce cas, la méthode d'hodographe n'est pas possible à cause de la non-linéarité de la condition à la surface libre. Le problème non linéaire sera résolu numériquement. On suit les étapes données et décrites par *Vanden Broeck et Frédéric Dias* [5] dans le cas d'une élévation triangulaire. Cette méthode réduit le problème bidimensionnel à un problème unidimensionnel où les inconnues sont à trouver uniquement sur la surface libre.

Considérons un écoulement à surface libre bidimensionnel, potentiel, d'un fluide incompressible et non visqueux, au dessus d'un creux de forme triangulaire. Par la suite, les variables avec leurs dimensions physiques seront notées avec tild (\sim) et les variables sans dimensions seront notée sans tild, exemple \tilde{v}_0 et v_0 , L et \tilde{L} .

3.2 FORMULATION GENERALE DU PROBLEME

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, nous avons choisi comme cadre de référence l'axe des x le long du fond rigide et horizontale AB, DE , l'axe des y est perpendiculaire à l'axe des x et passant par le sommet C du creux et dirigé vers le haut. Le triangle BCD formé par le creux est isocèle de base BD et les angles aux sommets B et D sont égaux à β . L'angle au sommet C sera donc égale à $(\pi - 2\beta)$. La courbe FHJ est la surface libre (Figure 3.1).

Loin et de profondeur BCD et au début, l'écoulement est uniforme de vitesse \tilde{v}_0 constante et de profondeur constante \tilde{L}_0 . On considère que l'effet des forces de gravité est nulle. Donc, l'écoulement est caractérisé par le nombre de *Weber* noté α défini par

$$\alpha = \frac{\tilde{\rho}\tilde{v}_0^2\tilde{L}}{\tilde{T}} \quad (3.1)$$

La pression au dessus de la surface libre est supposée constante.

L'axe des x et l'axe des y forment un plan de la variable complexe $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$. On note $\vec{v} = (\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}))$ le champ du vecteur vitesse de l'écoulement.

Les fonctions $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ qui définissent la fonction potentielle et la fonction ligne de courant,

respectivement. Elles vérifient les conditions suivantes

$$\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} \quad (3.2)$$

$$\tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}$$

La fonction potentielle complexe \tilde{f} est définie par

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) + i\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (3.3)$$

On note par $\tilde{\xi}$ la vitesse complexe $\tilde{\xi} = \tilde{u} - i\tilde{v} = \frac{d\tilde{f}}{d\tilde{z}}$

Il est résulte de la formule (2.17) que les fonctions \tilde{f} et $\tilde{\xi}$ de la variable complexe $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ sont des fonctions analytique de \tilde{z} .

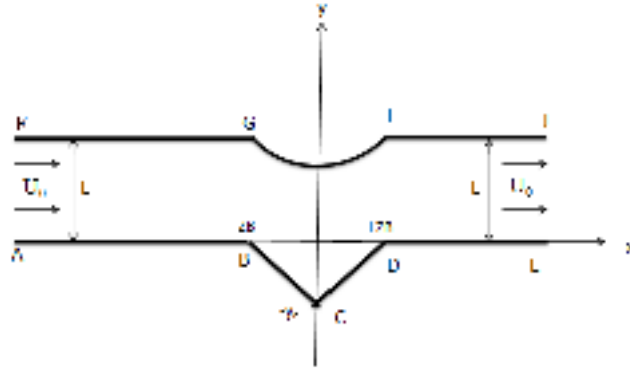


FIG. 3-1 – Schéma d'un écoulement bidimensionnel dans un canal et au dessus d'une dépression triangulaire

Le problème d'écoulement potentiel décrit est de déterminer la fonction potentielle de vitesse $\tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y})$ qui satisfait l'équation de Laplace donnée par

$$(1) \quad \Delta \tilde{\phi} = 0 \quad \text{dans le domaine d'écoulement}$$

Avec les conditions aux limites

$$(2) \quad \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad \text{sur } AB, DE$$

$$(3) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{p}} = cte \quad \text{sur la surface libre } FHJ$$

Pour résoudre le problème, nous introduisons les variables adimensionnelles en choi-

sisant \tilde{v}_0 comme unité de vitesse et \tilde{L} comme unité de longueur.

$$q = \frac{\tilde{q}}{\tilde{v}_0} \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\tilde{R}} \tilde{L} \quad (3.5)$$

Avec $\tilde{q} = \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}$ le module du vecteur de vitesse $\tilde{v} = (\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}))$ et \tilde{R} le rayon de courbure de la surface libre.

En supposant la pression juste au dessus de la surface libre est constante, la condition de *Bernoulli* sur la surface libre s'écrit alors

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^2 + \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{2}\tilde{v}_0^2 + \frac{\tilde{P}_0}{\tilde{\rho}} \quad \text{sur } FHJ \quad (3.6)$$

Où \tilde{P} , \tilde{q} et \tilde{P}_0 désignent, respectivement, la pression sur la surface libre, le module de la vitesse et la pression à l'infini juste au dessus la surface libre.

On note que le membre droit de (3.6) a été évalué d'après les conditions de l'écoulement à l'infini.

La relation entre \tilde{P} et \tilde{P}_0 est donné par la loi de *Laplace*

$$\tilde{P} - \tilde{P}_0 = \frac{\tilde{T}}{\tilde{R}} = \tilde{T}\tilde{K} \quad (3.7)$$

Où $\tilde{K} < 0$ si le centre de courbure est en dehors du fluide et $\tilde{K} > 0$ si le centre de courbure est dans le fluide.

Donc

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^2 - \frac{\tilde{T}}{\tilde{\rho}}\tilde{K} = \frac{1}{2}\tilde{v}_0^2 \quad \text{sur } FHJ \quad (3.8)$$

D'après (3.4), (3.5) et la relation $\tilde{K} = \frac{1}{\tilde{R}}$, l'équation (3.8) devient $q^2 - \frac{2\tilde{T}}{\tilde{\rho}\tilde{L}R\tilde{v}_0^2} =$
1 $\text{sur } FHJ$

Alors que (3.1) nous donne la relation finale

$$q^2 - \frac{2}{\alpha R} = 1 \quad \text{sur } FHJ \quad (3.9)$$

α le nombre de *Weber* défini par (3.1).

Puisque $\xi = u - iv$ et $q^2 = |\xi|^2 = u^2 + v^2$, l'équation (3.9) devient

$$|\xi|^2 - \frac{2}{\alpha R} = 1 \quad \text{sur } FHJ \quad (3.10)$$

Pour mieux définir le rayon de courbure de la surface libre FHJ , on écrit la vitesse complexe $\xi = u - iv$ sous la forme

$$\xi = \exp(\tau - i\theta) \quad (3.11)$$

Où $|\xi| = \exp(\tau)$ et θ est l'angle que fait l'axe des x horizontal et le vecteur $\tilde{v}(x, y)$ compté positivement dans le sens trigonométrique.

Soient \vec{e}_T, \vec{e}_N les vecteurs tangentiel et normal sur la surface libre, respectivement, ds désigne un élément de longueur d'arc sur la surface libre

En coordonnées intrinsèques (\vec{e}_T, \vec{e}_N) sur la surface libre, on a $\frac{d\vec{e}_T}{ds} = K\vec{e}_N = \frac{1}{R}\vec{e}_N \implies \left| \frac{d\vec{e}_T}{ds} \right| = \frac{1}{R}$

Soit \vec{v} le vecteur vitesse, d'après (5.4) $\vec{v} = (u, v) = (e^\tau \cos \theta, e^\tau \sin \theta)$, $q = |\tilde{v}|$

On sait que $\left| \frac{d\vec{e}_T}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \frac{1}{q} \right|$

Donc

$$\left| \frac{d\vec{e}_T}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{e}_T}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{1}{q} \right| \quad (3.12)$$

t désigne le temps.

D'une part, on a $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} \implies \frac{d\theta}{dt} = \left[\frac{d\theta}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} + \frac{d\theta}{d\psi} \frac{d\psi}{ds} \right] \frac{ds}{dt}$

Mais $\frac{d\psi}{ds} = 0$ et $\frac{ds}{dt} = q$,

Alors $\frac{d\theta}{dt} = q \frac{d\theta}{d\phi} \frac{d\phi}{ds}$

D'autre part $\frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{ds} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{ds}$

Donc $\frac{d\phi}{ds} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} u + \frac{\partial \phi}{\partial y} v \right) \frac{dt}{ds} = (u^2 + v^2) \frac{1}{q} = q$

D'où

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\phi} q^2 \quad \text{sur } FHJ \quad (3.13)$$

Donc, on a la relation suivante

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\phi} e^{2\tau} \quad (3.14)$$

Puisque $q^2 = (u^2 + v^2) = |\xi|^2 = |e^{\tau - i\theta}|^2 = e^{2\tau}$

Finalement

$$K = e^{2\tau} \left| \frac{d\vec{e}_T}{d\theta} \right| \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| \left| \frac{1}{q} \right| \quad (3.15)$$

mais $\vec{v} = (u, v) = (e^\tau \cos \theta, e^\tau \sin \theta) \implies q = |\vec{v}| = e^\tau$

et $\vec{e}_T = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (\cos \theta, \sin \theta) \implies \frac{d\vec{e}_T}{d\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta)$

ce qui implique que $\left| \frac{d\vec{e}_T}{d\theta} \right| = 1$

alors, l'équation (3.15) devient

$$K = \frac{1}{R} = e^\tau \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| \quad (3.16)$$

D'après $|\xi|^2 = e^{2\tau}$ et (3.16), l'équation de *Bernoulli* (3.10) s'écrit

$$\exp(2\tau) - \frac{2}{\alpha} \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| \exp(\tau) = 1 \quad \text{sur } FHJ \quad (3.17)$$

Ou alors

$$(u^2 + v^2) - \frac{2}{\alpha} \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| \sqrt{(u^2 + v^2)} = 1 \quad \text{sur } FHJ \quad (3.18)$$

3.3 Méthode de série

On résoud le problème numériquement en utilisant la technique de troncation de série utilisée par *Vanden Broeck et Keller*[4]. Cette technique nous permet de calculer la fonction de vitesse complexe ξ .

On transforme le domaine d'écoulement successivement par les transformations conformes en un demi disque unité dans un plan de variable complexe ω où la surface libre sera transformée conformément sur le demi cercle unité $\omega = e^{i\sigma}$ et la paroi rigide $ABCDE$ sur le diamètre du demi disque unité.

Puisque $\xi(z)$ est analytique dans le domaine d'écoulement de la variable $z = x + iy$, $\xi(\omega)$ est aussi analytique dans le demi disque unité de la variable complexe ω .

La fonction $f = \phi + i\psi$ transforme le plan d'écoulement à une bande infini $0 \leq \psi \leq 1$, $-\infty \leq \phi \leq +\infty$ dans le plan (ϕ, ψ) (Figure 3.2).

Avec la transformation

$$f = \frac{2}{\pi} \log \left(\frac{1 + \omega}{1 - \omega} \right) \quad (3.19)$$

La bande est transformée en un demi-cercle unitaire dans le plan ω .

Donc la surface libre est définie par la variable σ telle que

Dans le plan f , la surface libre est définie par la relation

En substituant (3.20) et (3.21) dans la relation (3.19), on trouve $f = \phi + i = \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{1 + \exp(i\sigma)}{1 - \exp(i\sigma)} \right)^2$ sur FHJ

Alors $\frac{df}{d\sigma} = \frac{d\phi}{d\sigma} = \frac{-2}{\pi \sin \sigma}$

Donc $\frac{\partial \sigma}{\partial \phi} = \frac{d\sigma}{d\phi} = \frac{-\pi \sin \sigma}{2}$ *FHJ*

En utilisant la relation $\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{d\theta}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\phi} = \frac{-\pi \sin \sigma}{2} \frac{d\theta}{d\sigma}$

$$\exp(2\tau) - \frac{\pi}{\alpha} \times (\sin \sigma) \times \left| \frac{d\theta}{d\sigma} \right| \times \exp(\tau) \quad sur \ FHJ \quad (3.23)$$

36

3.3.1 Comportement local de la vitesse au voisinage des singularités

Dans le plan d'écoulement z , on a trois singuliers ; z_B , z_D deux points où la vitesse est infinie et z_C où la vitesse est nulle, ces trois points correspondent, respectivement, aux points ω_B , ω_D et $\omega_C = 0$ dans le plan ω .

Comportement asymptotique au voisinage de $\omega = \omega_B$

L'écoulement, au voisinage de ω_B , est un écoulement dans un angle de $\beta + \pi$, dans le plan z , au voisinage de $z = z_B$, dont la fonction complexe est donnée par $f(z) \sim a^{\frac{\pi+\beta}{\pi}}(z - z_B)^{\frac{\pi}{\pi+\beta}} - f_B$ lorsque $z \rightarrow z_B$

Cela implique

$$(z - z_B) \sim \left[\frac{\pi}{a(\pi+\beta)}(f - f_B) \right] \quad \text{lorsque} \quad f \rightarrow f_B$$

On remplace la valeur de f , donnée dans (3.19), dans l'équation citée ci-dessus, on trouve

$$(z - z_B) \sim \left[\frac{\pi}{a(\pi+\beta)} \left(\frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right)^2 - f_B \right) \right]^{\frac{\pi+\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad \omega \rightarrow \omega_B$$

Puisque $\xi = \frac{df}{dz}$, on trouve

$$\xi \sim a^{\frac{\pi+\beta}{\pi}}(\pi + \beta)^{\frac{\beta}{\pi}} \left[2 \left(\ln \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right) - \pi f_B \right) \right]^{\frac{-\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad \omega \rightarrow \omega_B$$

Mais

$$\ln \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right) \sim k_1(\omega - \omega_B) \quad \text{lorsque} \quad \omega \rightarrow \omega_B$$

$$\text{Donc} \quad \xi \sim a^{\frac{\pi+\beta}{\pi}}(\pi + \beta)^{\frac{\beta}{\pi}} \left[k_1(\omega - \omega_B) \right]^{\frac{-\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad \omega \rightarrow \omega_B$$

$$\text{Alors} \quad \xi \sim C_1 k_1(\omega - \omega_B)^{\frac{-\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad \omega \rightarrow \omega_B$$

Avec $\beta = \frac{\pi}{4}$, on donne

$$\xi \sim C_1 \left[\frac{\omega - \omega_B}{1 - \omega_B} \right]^{\frac{-1}{4}} \quad \text{lorsque} \quad \omega \rightarrow \omega_B \quad (3.24)$$

Comportement asymptotique au voisinage de $\omega = \omega_D$

De même l'écoulement, au voisinage de ω_D , est un écoulement dans un angle de $\beta + \pi$, dans le plan z , au voisinage de $z = z_D$, dont la fonction complexe est donnée par

$$f(z) \sim a^{\frac{\pi+\beta}{\pi}}(z - z_D)^{\frac{\pi}{\pi+\beta}} \quad \text{lorsque} \quad z \rightarrow z_D$$

Cela implique

$$(z - z_D) \sim \left[\frac{\pi}{a(\pi+\beta)}(f - f_D) \right]^{\frac{\pi+\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad f \rightarrow f_D$$

On remplace la valeur de f , donnée dans (3.19), dans l'équation citée ci-dessus, on trouve

$$(z - z_D) \sim \left[\frac{\pi}{a(\pi+\beta)} \left(\frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right)^2 - f_D \right) \right]^{\frac{\pi+\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad \omega \rightarrow \omega_D$$

Puisque $\xi = \frac{df}{dz}$, on trouve

$$\xi \sim a^{\frac{\pi+\beta}{\pi}} (\pi + \beta)^{\frac{\beta}{\pi}} \left[2 \left(\ln \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right) - \pi f_D \right) \right]^{\frac{-\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad \omega \rightarrow \omega_D$$

$$\text{Mais } \ln \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right) \sim k_2(\omega - \omega_D) \quad \text{lorsque} \quad \omega \rightarrow \omega_D$$

$$\text{Donc } \xi \sim a^{\frac{\pi+\beta}{\pi}} (\pi + \beta)^{\frac{\beta}{\pi}} [k_2(\omega - \omega_D)]^{\frac{-\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad \omega \rightarrow \omega_D$$

$$\text{Alors } \xi \rightarrow C_2(\omega - \omega_D)^{\frac{-\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad \omega \rightarrow \omega_D$$

$$\text{Avec } C_2 = a^{\frac{\pi+\beta}{\pi}} (\pi + \beta)^{\frac{\beta}{\pi}} (k_2)^{\frac{-\beta}{\pi}}$$

avec $\beta = \frac{\pi}{4}$, on donne

$$\xi \sim C_2 \left(\frac{\omega - \omega_D}{1 - \omega_D} \right)^{\frac{-1}{4}} \quad \text{lorsque} \quad \omega \rightarrow \omega_D \quad (3.25)$$

Comportement asymptotique au voisinage de $\omega = \omega_C = 0$

L'écoulement, au voisinage de $\omega = 0$, est un écoulement dans un angle de $\pi - 2\beta$, dans le plan z , au voisinage de $z = z_C$, dont la fonction complexe est donnée par

$$f(z) \sim a^{\frac{\pi-2\beta}{\pi}} (z - z_C)^{\frac{\pi}{\pi-2\beta}} \quad \text{lorsque} \quad z \rightarrow z_C$$

$$\text{Cela implique} \quad (z - z_C) \sim \left[\frac{1}{a(\pi-2\beta)} f \right]^{\frac{\pi-2\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad f \rightarrow 0$$

Remplaçant la valeur de f , donnée dans (3.19), dans l'équation précédente, on obtient

$$(z - z_C) \sim \left[\frac{1}{a(\pi-2\beta)} \ln \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right)^2 \right]^{\frac{\pi-2\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad \omega \rightarrow 0$$

Puisque $\xi = \frac{df}{dz}$, on trouve

$$\xi \rightarrow a^{\frac{\pi-2\beta}{\pi}} (\pi - 2\beta)^{\frac{-2\beta}{\pi}} \left(\ln \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right)^2 \right)^{\frac{2\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad \omega \rightarrow 0$$

$$\text{Mais } \ln \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right)^2 = 2 \ln \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right) \sim k_3 \omega \quad \text{lorsque} \quad \omega \rightarrow 0$$

$$\text{Donc } \xi \rightarrow a^{\frac{\pi-2\beta}{\pi}} (\pi - 2\beta)^{\frac{-2\beta}{\pi}} (k_3 \omega)^{\frac{2\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad \omega \rightarrow 0$$

Alors

$$\xi \rightarrow C(\omega)^{\frac{2\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad \omega \rightarrow 0$$

$$\text{Avec } C_3 = a^{\frac{\pi-2\beta}{\pi}} (\pi - 2\beta)^{\frac{-2\beta}{\pi}} (k_3)^{\frac{2\beta}{\pi}}$$

avec $\beta = \frac{\pi}{4}$, on donne

$$\xi \sim C_3(\omega)^{\frac{1}{2}} \quad \text{lorsque} \quad \omega \rightarrow 0 \quad (3.26)$$

3.3.2 Formulation de la série

Puisque $\xi(\omega)$ est analytique excepte aux points B, C et D , $\xi(\omega)$ s'écrit sous la forme

$$\xi(\omega) = g(\omega) \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega^k \right)$$

Où $g(\omega)$ contient les singularités et les zéros de ξ aux points B, C et D données en (3.24), (3.25) et (3.26).

$$\xi = u - iv = \left(\frac{\omega - \omega_B}{1 - \omega_B} \right)^{-\frac{1}{4}} (\omega)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega - \omega_D}{1 - \omega_D} \right)^{-\frac{1}{4}} \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega^k \right) \quad (3.27)$$

En considérant la symétrie de l'écoulement, on a $\omega_D = -\omega_B$, l'équation (3.27) devient

$$\xi = \left(\frac{\omega - \omega_B}{1 - \omega_B} \right)^{-\frac{1}{4}} (\omega)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega + \omega_B}{1 + \omega_B} \right)^{-\frac{1}{4}} \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega^k \right)$$

En utilisant les conditions aux limites suivantes : $v = 0$ sur AB, DE

Sur AB , $\xi = u$, $\omega = -\varsigma$

Sur DE , $\xi = u$, $\omega = +\varsigma$ avec ς un nombre réel

Par suite, on a l'égalité suivante

$$\begin{aligned} \xi = u &= ((-\varsigma)^2)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\varsigma^2 - \omega_B^2}{1 - \omega_B^2} \right)^{-\frac{1}{4}} \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (-\varsigma)^k \right) \\ &= ((+\varsigma)^2)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\varsigma^2 - \omega_B^2}{1 - \omega_B^2} \right)^{-\frac{1}{4}} \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varsigma^k \right) \end{aligned}$$

Puisque ς un nombre réel, et pour que l'égalité précédente soit vérifier, les coefficients a_k doivent être réels ainsi que $k = 2n$, cela implique

$$\xi = \left(\frac{\omega - \omega_B}{1 - \omega_B} \right)^{-\frac{1}{4}} (\omega)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega + \omega_B}{1 + \omega_B} \right)^{-\frac{1}{4}} \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \omega^{2k} \right) \quad (3.28)$$

Les coefficients réels a_{2k} sont à déterminer.

La série doit converge dans le disque unité du plan ω .

En substituant (3.11) et (3.20) dans (3.28), on obtient

$$\exp(\tau - i\theta) = \left(\frac{1 - \omega_B^2}{e^{2i\sigma} - \omega_B^2} e^{2i\sigma} \right) \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} e^{2ik\sigma} \right)$$

$$\text{Implique} \quad \exp(4(\tau - i\theta)) = \frac{(1 - \omega_B^2)(e^{-2i\sigma} - \omega_B^2)e^{2i\sigma}}{1 + \omega_B^4 - 2\omega_B^2 \cos 2\sigma} \exp \left(4 \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} e^{2ik\sigma} \right)$$

$$\text{Implique} \quad \exp(4(\tau - i\theta)) = \frac{1 - \omega_B^2}{1 + \omega_B^4 - 2\omega_B^2 \cos 2\sigma} (1 - \omega_B^2 e^{2i\sigma}) \exp \left(4 \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} e^{2ik\sigma} \right)$$

Posons $X = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \cos 2k\sigma; Y = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \sin 2k\sigma; Z = 4Y + 2\sigma;$

$$\exp(4(\tau - i\theta)) = \left(\frac{1 - \omega_B^2}{1 + \omega_B^4 - 2\omega_B^2 \cos 2\sigma} \right) \times \exp(4X) \times (\exp(4iY) - \omega_B^2 \exp(iZ))$$

Puisque $\exp(4(\tau - i\theta)) = e^{4\tau}(\cos(4\theta) - i \sin(4\theta))$

$$\exp(4iY) - \omega_B^2 \exp(iZ) = (\cos(4Y) - \omega_B^2 \cos Z) + i(\sin(4Y) - \omega_B^2 \sin Z)$$

Alors

$$\begin{cases} e^{4\tau} \cos 4\theta = \left(\frac{1 - \omega_B^2}{1 + \omega_B^4 - 2\omega_B^2 \cos 2\sigma} \right) \times \exp(4X) \times (\cos(4Y) - \omega_B^2 \cos Z) \\ e^{4\tau} \sin 4\theta = \left(\frac{1 - \omega_B^2}{1 + \omega_B^4 - 2\omega_B^2 \cos 2\sigma} \right) \times \exp(4X) \times (-\sin(4Y) + \omega_B^2 \sin Z) \end{cases}$$

On déduit les relations suivantes $\tan 4\theta = \frac{-\sin(4Y) + \omega_B^2 \sin Z}{\cos(4Y) - \omega_B^2 \cos Z}$

D'où

$$\theta = \frac{1}{4} \arctan \left(\frac{-\sin(4Y) + \omega_B^2 \sin Z}{\cos(4Y) - \omega_B^2 \cos Z} \right) \quad (3.29)$$

Ainsi

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{1}{4} \left(-4 \frac{\partial Y}{\partial \sigma} - 1 + \frac{1 - \omega_B^4}{(1 + \omega_B^4) - 2\omega_B^2 \cos 2\sigma} \right) \quad (3.30)$$

Et

$$e^{8\tau} = \left(\frac{1 - \omega_B^2}{1 + \omega_B^4 - 2\omega_B^2 \cos 2\sigma} \right)^2 \times \left((\cos(4Y) - \omega_B^2 \cos Z)^2 + (-\sin(4Y) + \omega_B^2 \sin Z)^2 \right) e^{8X}$$

D'où

$$\exp(\tau) = \left(\frac{1 - \omega_B^2}{1 + \omega_B^4 - 2\omega_B^2 \cos 2\sigma} \right)^{\frac{1}{8}} \times \exp(X) \quad (3.31)$$

Remplaçant (3.30) et (3.31) dans l'équation de *Bernoulli*(3.23), on obtient une équation en terme de σ .

$$e^{2X} \left(\frac{(1 - \omega_B^2)^2}{1 + \omega_B^4 - 2\omega_B^2 \cos 2\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} - \frac{\pi}{\alpha} \times \sin \sigma \times \left| \frac{1}{4} \left(-4 \frac{\partial Y}{\partial \sigma} - 1 + \frac{1 - \omega_B^2}{(1 + \omega_B^4) - 2\omega_B^2 \cos 2\sigma} \right) \right| \times$$

$$e^X \left(\frac{(1 - \omega_B^2)^2}{1 + \omega_B^4 - 2\omega_B^2 \cos 2\sigma} \right) = 1 \quad \text{sur } FHJ \quad (3.32)$$

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \cos 2k\sigma; \quad Y = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \sin 2k\sigma; \quad \frac{\partial Y}{\partial \sigma} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k) a_{2k} \cos 2k\sigma$$

où les seuls inconnus sont les coefficients a_{2k} .

Pour déterminer les coefficients $a_{\widehat{k}}$, $\widehat{k} = 2k$, de la série, on tronque le série après N termes puis on discrétise l'intervalle $[0, \pi]$ en N points, en introduisant

$$\sigma_1 = \frac{\pi}{N} \left(I - \frac{1}{2} \right), I = 1, \dots, N \quad (3.33)$$

En substituant les points de (3.33) dans l'équation de *Bernoulli*, on obtient un système de N équations algébriques non linéaire à N inconnus a_1, \dots, a_N

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(1 - \omega_B^2)^2}{1 + \omega_B^4 - 2\omega_B^2 \cos 2\sigma_1} \right)^{\frac{1}{4}} \times \exp \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2(k-1)\sigma_1 \right) - \frac{\pi}{\alpha} \times \sin \sigma_1 \times \\ & \left| \frac{1}{4} \left(-4 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (2(k-1)) a_k \cos 2(k-1)\sigma_1 \right) - 1 + \frac{1 - \omega_B^4}{(1 + \omega_B^4) - 2\omega_B^2 \cos (2\sigma_1)} \right) \right| \times \\ & \left(\frac{(1 - \omega_B^2)^2}{(1 + \omega_B^4) - 2\omega_B^2 \cos (2\sigma_1)} \times \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2(k-1)\sigma_1 \right) \right) = 1, \quad 0 \prec \sigma_1 \prec \pi \end{aligned} \quad (3.34)$$

Le nombre de *Weber* α est un paramètre. On utilise la méthode de *Newton* et la méthode de factorisation *LU* de Doolittle pour calculer les coefficients (a_n , $n = 1, \dots, N$) pour différentes valeurs du nombre de *Weber* α . On donne $\omega_B = -\omega_D = -0.25$

($z_B = -z_D = -0.14$, dans le plan z).

L'algorithme qui détermine (a_n , $n = 1, \dots, N$) converge après très peu d'itérations qu'on discute dans la section III.4.

Forme de la surface libre

Après avoir trouver les coefficients a_n , la forme de la surface libre est déterminée comme suit

De la relation

$$\exp(-\tau + i\theta) = \frac{1}{u - iv} = \frac{\partial c}{\partial \phi} + i \frac{\partial y}{\partial \phi} \quad (3.35)$$

On a

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \phi} = \exp(-\tau) \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} = \exp(-\tau) \sin \theta \end{cases} \quad (3.36)$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \sigma} &= \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} &= \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \end{aligned}$$

Sur la surface libre

En substituant (3.22), (3.30) et (3.31) et en utilisant (3.36), on trouve $\frac{\partial x}{\partial \sigma}, \frac{\partial y}{\partial \sigma}$ en chaque point $\sigma_1, I = 1, \dots, M$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma_1) &= \frac{-2}{\pi \sin \sigma_1} \times e^{-X} \times \left(\frac{(1 - \omega_B^2)^2}{1 + \omega_B^4 - 2\omega_B^2 \cos 2\sigma} \right)^{\frac{-1}{8}} \\ &\times \cos \left(\frac{1}{4} \arctan \left(\frac{-\sin \left(\sum_{k=1}^N 4a_k \sin 2(k-1)\sigma_1 \right) + \omega_B^2 \sin \left(\left(\sum_{k=1}^N 4a_k \sin 2(k-1)\sigma_1 \right) + 2\sigma_1 \right)}{\cos \left(\sum_{k=1}^N 4a_k \sin 2(k-1)\sigma_1 \right) - \omega_B^2 \cos \left(\left(\sum_{k=1}^N 4a_k \sin 2(k-1)\sigma_1 \right) + 2\sigma_1 \right)} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma_1) &= \frac{-2}{\pi \sin \sigma_1} \times e^{-X} \times \left(\frac{(1 - \omega_B^2)^2}{1 + \omega_B^4 - 2\omega_B^2 \cos 2\sigma} \right)^{\frac{-1}{8}} \\ &\times \sin \left(\frac{1}{4} \arctan \left(\frac{-\sin \left(\sum_{k=1}^N 4a_k \sin 2(k-1)\sigma_1 \right) + \omega_B^2 \sin \left(\left(\sum_{k=1}^N 4a_k \sin 2(k-1)\sigma_1 \right) + 2\sigma_1 \right)}{\cos \left(\sum_{k=1}^N 4a_k \sin 2(k-1)\sigma_1 \right) - \omega_B^2 \cos \left(\left(\sum_{k=1}^N 4a_k \sin 2(k-1)\sigma_1 \right) + 2\sigma_1 \right)} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

La forme de la surface libre est obtenue en intégrant (3.37), (3.38) numériquement avec des conditions initiales $x(0) = 7.5, y(0) = 1$ en considérant $x(0) = 7.5$ est à l'infini. La procédure numérique est exécutée pour $N = 500$.

3.4 Résultats et discussions

3.4.1 Solution sans tension de surface

Dans cette section, le nombre de *Weber* α tend vers l'infini, alors la tension de surface tend vers zéro et le système (3.34) se réduit à

$$\left(\frac{(1 - \omega_B^2)^2}{1 + \omega_B^4 - 2\omega_B^2 \cos 2\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \times \exp \left(2 \sum_{k=1}^N a_k \cos 2(k-1)\sigma_1 \right) = 1, I = 1, \dots, N \text{ sur } FHJ \quad (3.39)$$

Avec les σ_1 des valeurs données par la relation (3.34).

Le tableau donné ci-dessous montre quelques de coefficients a_n de la série (3.39) pour $\alpha \rightarrow \infty (\alpha = 9.10^{100})$.

a_1	a_5	a_{15}	a_{35}	a_{50}
$1.6500.10^{-2}$	$-4.0696.10^{-7}$	$-4.3516.10^{-10}$	$5.5259.10^{-10}$	$4.1897.10^{-10}$

Tableau.1

Valeurs des coefficients a_n pour $\alpha \rightarrow \infty$

La conclusion obtenue c'est que les a_n sont négligeables ($a_n \rightarrow 0$). L'algorithme converge très rapidement. En substituant ces valeurs dans (3.28), on obtient la solution $\xi = u - iv = \left(\frac{\omega - \omega_B}{1 - \omega_B} \right)^{\frac{-1}{4}} (\omega)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega + \omega_B}{1 + \omega_B} \right)^{\frac{-1}{4}} \text{ sur } FHJ$

Ou bien pour $\omega_B = -0.25$

$$\xi = u - iv = \left(\frac{\omega^2 - (0.25)^2}{1 - (0.25)^2} \right)^{\frac{-1}{4}} (\omega)^{\frac{1}{2}} \text{ sur } FHJ$$

On vérifie aisément que la solution donnée est une solution exacte.

La forme de la surface libre pour $\alpha \rightarrow \infty$ est donnée dans la (Figure 3.4).

3.4.2 Solution avec tension de surface

Pour différentes valeurs du nombre de *Weber* $\alpha \prec \infty$, on n'a pas une solution exacte. On utilise la méthode décrite dans la section III.2 pour résoudre le système non linéaire (3.34). Le tableau ci-dessous présente quelques valeurs des coefficients a_n . La plupart des

résultats ont été trouvés pour $N = 50$.

α	α_1	α_5	α_{15}	α_{35}	α_{50}
1000	$1.6500.10^{-2}$	$-3.1144.10^{-6}$	$-1.6035.10^{-7}$	$-1.8164.10^{-8}$	$-8.8607.10^{-10}$
500	$1.6500.10^{-2}$	$-5.8200.10^{-6}$	$-3.2081.10^{-7}$	$-3.6331.10^{-8}$	$-1.7636.10^{-9}$
100	$1.6300.10^{-2}$	$-2.7380.10^{-5}$	$-1.6084.10^{-6}$	$-1.8213.10^{-7}$	$-8.5986.10^{-9}$
10	$1.4600.10^{-2}$	$-2.4479.10^{-4}$	$-1.6024.10^{-5}$	$-1.8249.10^{-6}$	$-7.8906.10^{-8}$
5	$1.3000.10^{-2}$	$-4.1797.10^{-4}$	$-3.0407.10^{-5}$	$-3.5127.10^{-6}$	$-1.4818.10^{-7}$
1	$6.7000.10^{-3}$	$-7.1895.10^{-4}$	$-7.4169.10^{-5}$	$-9.2226.10^{-6}$	$-3.7885.10^{-7}$
0.11	$-7.9812.10^{-4}$	$-2.6085.10^{-4}$	$-3.3815.10^{-5}$	$-4.4505.10^{-6}$	$-1.8204.10^{-7}$

Tableau.2

Valeurs des coefficients a_n pour différentes valeurs du nombre de Weber α

Les coefficients a_n , donnés dans le tableau 2, sont décroissants, ce qui montre que la série est absolument convergente pour tout nombre de Weber α , d'après $\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \omega^{2(k-1)} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$

L'algorithme converge pour toutes les valeurs du paramètre α . Mais, on constate que la convergence est plus rapide quand $\alpha \rightarrow \infty$ et elle est moins rapide quand $\alpha \rightarrow 0$.

Pour différentes valeurs du nombre de Weber α , $0 < \alpha < \infty$, la forme de la surface libre est représentée dans la (Figure 3.5). On remarque que lorsque α augmente ($\alpha \geq \alpha_0$) les courbes représentant la surface libre se rapprochent de la solution exacte ($\alpha \rightarrow \infty$), graphiquement pour $\alpha \geq 200$, ces courbes sont confondues avec la solution exacte ($\alpha = \infty$) ce qui suggère que les tensions de surfaces peuvent être négligées si $\alpha \geq 200$ (Figure 3.6)

On donne le tableau suivant qui montre la variation du y_H (au point H sur la surface libre FHJ) en fonction de α^{-1} , dont le graphe est représenté dans la (Figure 3.7)

α^{-1}	0.000	0.002	0.010	0.020	0.100	0.250	0.500	1.427	5.000	7.690
y_H	0.959	0.959	0.960	0.960	0.963	0.966	0.971	0.982	0.992	0.993

Tableau.3

Variation de y_H en fonction de α^{-1}

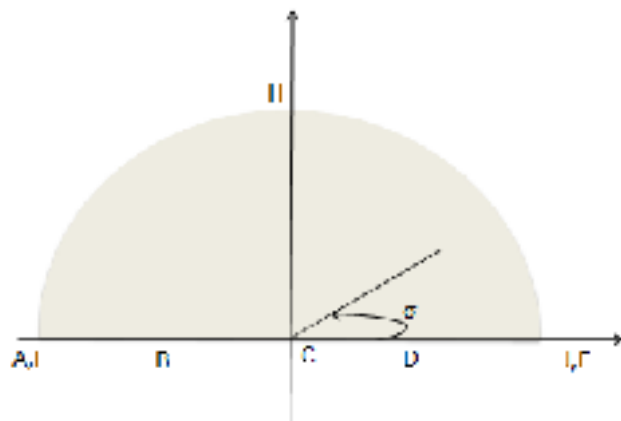
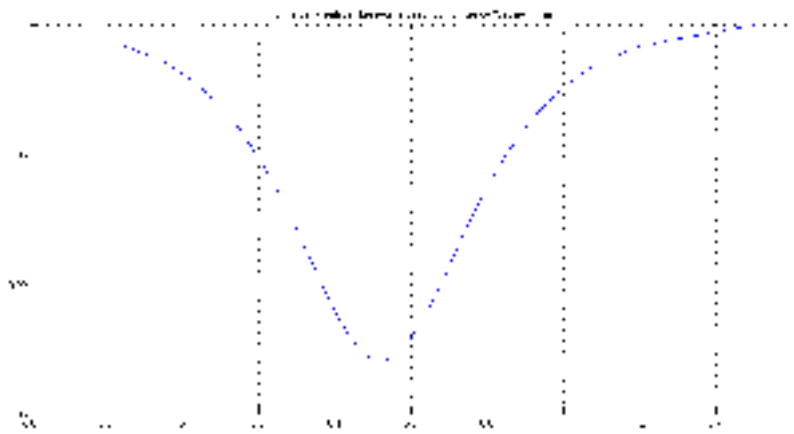


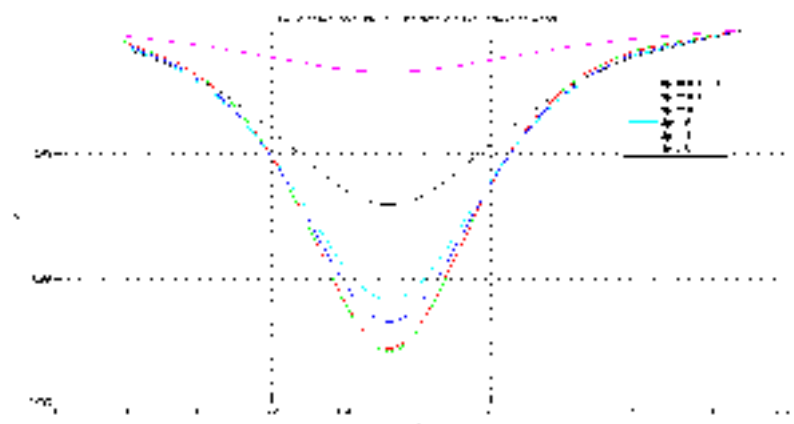
FIG. 3-3 – plan ω : transformé du plan f par l'application (3.19)

3



10.png

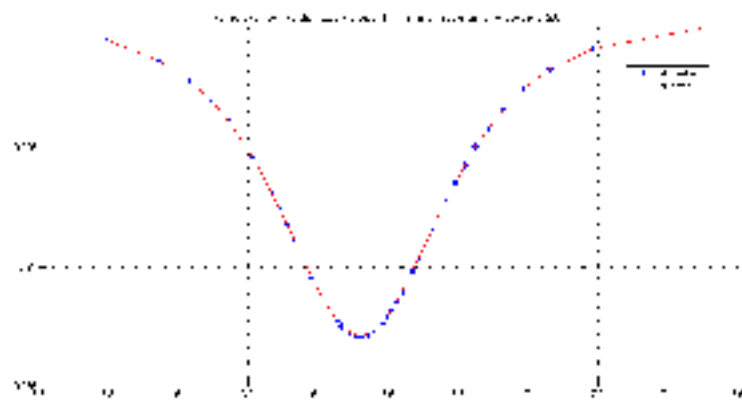
11



11.png

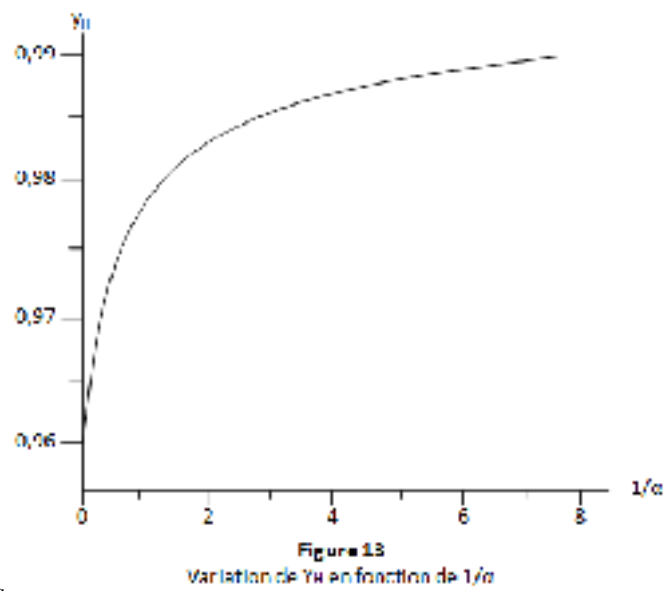
En faisant correspondre à chaque valeur du nombre de *Weber* α tel que $0 < \alpha < \infty$, une seule courbe, plus précisément on correspond à chaque point H sur la surface libre FHJ , pour une valeur fixée α , un seule et unique y_H et par suite on conclut qu'une solution du problème existe et elle est unique pour chaque $\alpha > 0$.

12



12.png

13



13.png

Annexe

Contenu :

A.1 Méthode de *Newton* pour la résolution d'un système d'équation non linéaires $F(X) = 0$

A.2 Algorithme de *Newton*.

A.3 Méthode de Factorisation de Doolittle

$A \rightarrow LU$ pour la résolution d'un système linéaire $AX = B$

A.4 Algorithme de factorisation $A \rightarrow LU$ de Doolittle

A.1 Méthode de Newton pour la résolution d'un système d'équations non linéaires $F(X) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

Ce système peut être écrit sous la forme matricielle

La méthode de *Newton* consiste à résoudre le système d'équations linéaires précédent, en trouvant l'ensemble des n valeurs réelles $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^t$ vérifiant les n équations du système A.1.

En supposant que les fonction f_i sont des fonction continument différentiables, on fait le développement de *Taylor* dans un voisinage $X^{(k)}$ proche de X^* , donné à la $k - ième$ itération, on obtient

$$\begin{aligned} f_i(X^*) &= f_i(X^{(k)}) + \sum_{j=1}^n (x_j^* - x_j^{(k)}) \frac{\partial f_i(X^{(k)})}{\partial x_j} + \\ \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \left(x_j^* - x_j^{(k)} \right) \left(x_r^* - x_r^{(k)} \right) \frac{\partial^2 f_i(X^{(k)})}{\partial x_j \partial x_r} + \dots &= 0, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

Si $X^{(k)}$ est un estimé proche de X^* , les termes $\left(x_j^* - x_j^{(k)}\right)^m$, sont négligeable et le

système A.3 devient

$$\sum_{j=1}^n \left(x_j^* - x_j^{(k)} \right) \frac{\partial f_i(X^{(k)})}{\partial x_j} = -f_i(X^{(k)}), i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

Ou bien sous terme matricielle

$$E^{(k)} \cdot \Delta X^{(k)} = F^{(k)} \quad (5)$$

En posant

$$E_{ij}^{(k)} = \frac{\partial f_i(X^{(k)})}{\partial x_j}, \Delta X_j^{(k)} = x_j^* - x_j^{(k)}, F_i^{(k)} = -f_i(X^{(k)}), \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$$

On a conclut le système linéaire A.5, en notant que les quantités $\Delta X_j^{(k)}, j = 1, 2, \dots, n$ sont les inconnues du système.

Pour obtenir la solution de ce système, on utilise la méthode de factorisation LU de Doolittle afin d'achever les valeurs des inconnues $\Delta X_j^{(k)}$.

La relation

$$\Delta X_j^{(k)} = X^{(k+1)} - X^{(k)} \quad (6)$$

Où

$X^{(k+1)}$ est une meilleure approximation estimée de X^* ;

$\Delta X_j^{(k)}$ est l'estimé de l'erreur commise de l'approximation de X^* par $X^{(k)}$.

On fait l'itération jusqu'à ce que $|f_i(x^{(k+1)})| < \varepsilon$.

A.2 Algorithme de Newton

Soient $X^{(0)}, \varepsilon$

1. Calculer

$$\left. \begin{array}{l} E_{ij}^{(k)} = \frac{\partial f_i(X^{(k)})}{\partial x_j} \\ F_i^{(k)} = -f_i(X^{(k)}) \end{array} \right\} j = 1, 2, \dots, n \quad \left. \right\} i = 1, 2, \dots, n$$

2. Résoudre le système linéaire

$$\sum_{j=1}^n \Delta X_j^{(k)} E_{ij}^{(k)} = F_i^{(k)} \} i = 1, 2, \dots, n$$

3. Calculer

$$x_i^{(k+1)} = \Delta X^{(k)} + x_i^{(k)} \} i = 1, 2, \dots, n$$

4. Si

$$|f_i(x^{(k+1)})| \prec \varepsilon \} i = 1, 2, \dots, n$$

Soit vérifier, arrêter

A.3 Méthode de factorisation de Doolittle $A \rightarrow LU$ pour la résolution d'un système linéaire $AX = B$

Le principe de cette méthode est de décomposer A en $A = LU$; où L est une matrice triangulaire inférieure et U une matrice triangulaire supérieure.

Le système cramien d'ordre n , $AX = B$ devient

$$LU X = B \quad (7)$$

Qu'on peut le décomposer en

$$LY = B \quad (8)$$

$$UX = Y \quad (9)$$

En supposant qu'on connaît les $(i-1)$ premiers éléments de Y , le $i^{\text{ème}}$ s'écrit

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right], \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

Avec $B = (b_i)_{i=1, \dots, n}$; $Y = (y_j)_{j=1, \dots, n}$; $L = (l_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$

Le système A.8 à matrice triangulaire inférieure L ($l_{ij} = 0$ si $i \prec j$) se résoud par la formule A.10.

A.4 Algorithme de Factorisation de Doolittle $A \rightarrow LU$

1. Calculer

$$l_{ii} = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\left. \begin{array}{l} u_{rj} = a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{kj} \\ l_{ir} = [a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr}] / u_{rr} \end{array} \right\} \begin{array}{l} j = r, \dots, n \\ i = r+1, \dots, n \end{array} \quad r = 1, \dots, n$$